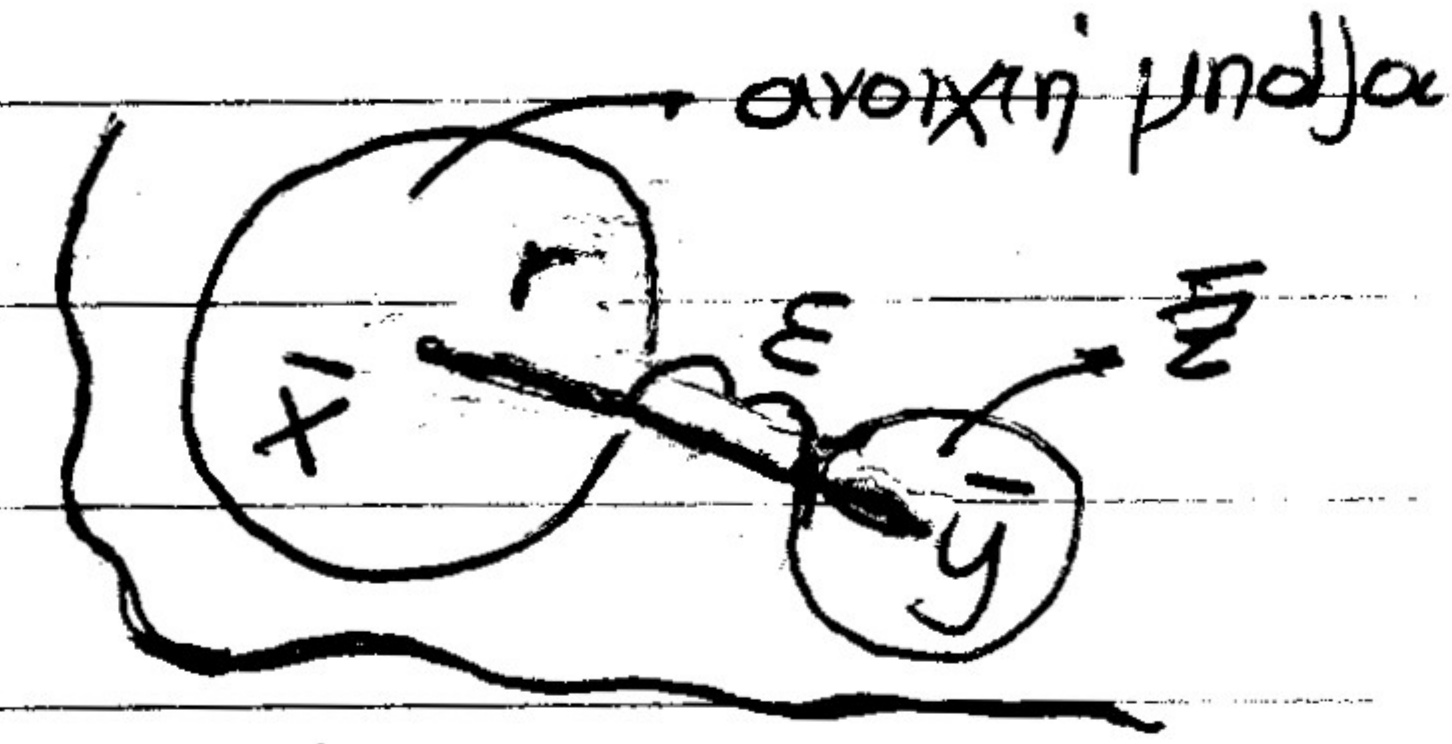
"Η κλειστή μπάλα $\overline{B}(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \leq r\}$

$$= B(\bar{x},r) \cup \partial B(\bar{x},r)$$

, είναι κλειστό σύνολο."



Απόδειξη:

Έστω $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\bar{x},r)$. Τότε $\|\bar{x}-\bar{y}\| > r$,
δηλαδή $\exists\, \varepsilon > 0 : \|\bar{x}-\bar{y}\| = r+\varepsilon$

Τότε $B(\bar{y},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\bar{x},r)$
Έστω $z \in B(\bar{y},\varepsilon)$. Τότε $\|\bar{z}-\bar{y}\| \leq \varepsilon$.
Θνδο: $\|\bar{z}-\bar{x}\| > r$
Έχουμε:

$$\|\bar{z}-\bar{x}\| \geq \|\bar{y}-\bar{x}\| - \|\bar{z}-\bar{y}\|$$

$$\left[\|\bar{y}-\bar{x}\| = \|\bar{y}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{x}\| \leq \|\bar{y}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{x}\|\right]$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{z}-\bar{x}\| \geq \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{r+\varepsilon} - \underbrace{\|\bar{y}-\bar{z}\|}_{<\varepsilon} > r+\varepsilon-\varepsilon = r$$

(Εδώ χρησιμοποιούμε την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα $\longrightarrow \big|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\big| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$)

$\partial B(\bar{x},r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| = r\}$, είναι κλειστό, αφού:

$$\partial B(\bar{x},r) = \bar{B}(\bar{x},r) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x},r)$$

$$= \underbrace{\{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \leq r\}}_{\text{κλειστό}} \cap \underbrace{\{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \geq r\}}_{\text{κλειστό ως συμπλήρωμα ανοιχτού } (<)}$$

, δηλαδή έχω πεπερασμένη τομή κλειστών, η οποία είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Το U λέγεται:

Φραγμένο, αν $\exists\, r>0 : U \subset B(\bar{0},r)$

Συμπαγές, αν είναι κλειστό και φραγμένο

, π.χ

$\bar{B}(\bar{x},r)$, $\partial B(\bar{x},r)$ είναι συμπαγή σύνολα.

Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε:

α) $\text{int}\, U \subset U$, β) $\text{int}\, U$ ανοιχτό

γ) U ανοιχτό $\Leftrightarrow U = \text{int}\, U$

δ) $U \subset V \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{int}\, U \subset \text{int}\, V$

ε) $\text{ext}\, U = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$

Απόδειξη του β).

Έστω $\bar{x} \in \mathrm{int}\,U$ [θδο $\exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathrm{int}\,U$]
Έχουμε δηλαδή $\varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$.
Όμως η ανοιχτή μπάλα $B(\bar{x}, \varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο
$\Rightarrow \forall\, \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)\ \exists\, \varepsilon_{\bar{y}} > 0 : B(\bar{y}, \varepsilon_{\bar{y}}) \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathrm{int}\,U$.

Απόδειξη του γ)

($\Leftarrow$ β), $\Rightarrow \mathrm{int}\,U \subset U$ (από το α))
Μένει νδο $U \subset \mathrm{int}\,U$.
Αφού U ανοιχτό, $\forall\, \bar{x} \in U\ \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$,
$\rightarrow \bar{x}$ εσωτερικό σημείο του U, δηλαδή $\bar{x} \in \mathrm{int}\,U$.

Απόδειξη του δ).

Χρήση του ορισμού $\mathrm{ext}\,U$ και χρήση του α)

Παράδειγμα: Το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορο της ανοιχτής και της κλειστής μπάλας ταυτίζονται, με:

- $\text{int}\, B(\bar{x},r) = B(\bar{x},r) = \text{int}\, \bar{B}(\bar{x},r)$

- $\text{ext}\, B(\bar{x},r) = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x},r) = \text{ext}\, \bar{B}(\bar{x},r)$

- $\text{bdr}\, B(\bar{x},r) = \partial B(\bar{x},r) = \text{bdr}\, \bar{B}(\bar{x},r)$

<u>Ερωτήματα</u>

α) Ποιο το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $U \subset \mathbb{R}^n$ (για ένα τυχαίο U)

β) Ποια η σχέση του παραπάνω συνόλου με το U και το σύνορο του U

γ) Ποιες ιδιότητες έχουν τα κλειστά και όχι τα ανοιχτά σύνολα

Για το α).

Ορισμός: Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$. Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, που περιέχουν το U, ονομάζεται κλειστή θήκη του U, συμβολικά $\overline{U}$, με

$$\overline{U} := \bigcap_{K\in\mathcal{K}} K, \quad \mathcal{K}=\{K\subset\mathbb{R}^n : K \text{ κλειστό}, K\supset U\}$$

Πρόταση:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha)\ U\subset\overline{U} \\ (\beta)\ \overline{U} \text{ κλειστό} \\ (\gamma)\ U\subset K\subset\mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$

Τα (α), (β), (γ) δηλώνουν ότι το $\overline{U}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U.

(δ) U κλειστό $\iff \overline{U}=U$

[$\Leftarrow$ (✓) $\Rightarrow$ Αφού $\overline{U}\subset U$, U κλειστό
$\Rightarrow U\in\mathcal{K} \Rightarrow \overline{U}\subset U$ και από το (α) πάντα έχουμε $U\subset\overline{U}$